

Capitalização Contínua

i_n = taxa nominal no período inteiro

K = número de capitalizações que aparece na taxa nominal(no período inteiro).

Para n períodos temos:

$M = C.e^{n.i_n}$, $e=2,71828$ número de Euler ; i_n = taxa instantânea.

Exemplo:

$C = 500.000$ $n=2$ anos $i_n=10\%$ a.s. cap. Contínua $M=?$

$M = C.e^{n.i_n}$, $M = 500.000 . e^{4.0,10}$ $M=745.912,3488$

Juros Simples X Juros Compostos

$n=1$ $M_s = M_c$

$n>1$ $M_c > M_s$

$0 < n < 1$ $M_s > M_c$

Exemplo:

$C=1.000$ u.m.

$i=10\%$ a.a

$M_s=?$ $M_c=?$

a) $M_s = C(1+i_n) = 1000 (1+0,10 . 1) = 1100$

$M_c = C(1+i)^n = 1000 (1+0,10)^1 = 1100$

b) $M_s = C(1+i_n) = 1000 (1+0,10 . 3) = 1300$

$M_c = C(1+i)^n = 1000 (1+0,10)^3 = 1331$

c) $M_s = C (1+i_n) = 1000 (1+0,10 . 10/12) = 1.083,33$

$M_c = C(1+i)^n = 1000 (1+0,10)^{10/12} = 1.082,6645$

Equivalência de Capitais

C_1 = capital na data m

C_2 = capital na data n

($m < n$)

C_1 é equivalente a C_2 a uma dada taxa i , se e somente se,

$$\frac{C_1}{(1+i)^m} = \frac{C_2}{(1+i)^n}$$

Ex: Qual o capital que hoje é equivalente a 1.500.000 daqui a 3 meses a uma taxa de 2% a . m.

$$x = \frac{1.500.000}{(1 + 0,02)^3} = 1.413,483$$

Exercícios

- 1) Uma máquina é vendida em 2 parcelas: 20.000 de entrada e 40.000 após 5 meses. Um cliente propõe adiar a 2 parcela por mais 3 meses. Sabendo-se que a taxa cobrada é de 5% a.m.(capitalização composta), quanto deve o cliente pagar mais na entrada?

$$\Delta = x - 20.000 = ?$$

$$20.000 + \frac{40.000}{(1,05)^3} = x + \frac{40.000}{(1,05)^8} \quad x = 24.267$$

$$\Delta = 4.267,47$$

- 2) Tiago pretende vender um terreno por 600.000 à vista. Entretanto, em face das dificuldades da venda à vista, aceita o seguinte plano:
- a) entrada de 120.000
 - b) 250.000 no final de 2 meses
 - c) duas parcelas, sendo a segunda, 50% superior a primeira, vencíveis em 1 ano e 15 meses, respectivamente. Sendo de 6% a.m. a taxa de juros compostos, qual o valor da última parcela?

Descontos Simples

N= valor nominal (valor da face) do título;

A = valor atual (valor descontado) do título;

D= desconto

d=taxa de desconto

n= número de períodos até o vencimento do título.

$$\boxed{A = N - D} \quad \text{para qualquer desconto}$$

a) Desconto Racional Simples (por dentro) :DRS

DRS = juros simples calculado sobre o valor atual do título

$$D_{rs} = A_r \cdot d \cdot N \quad A_r = N - D_{rs}$$

$$A_r = N - A_r \cdot d \cdot n$$

$$A_r = \frac{N}{1 + dn}$$

Nota:

J.S.	DRS
$J = C \cdot i \cdot n$	$D_{rs} = A_r \cdot d \cdot n$
$C = \frac{M}{(1 + i \cdot n)}$	$A_r = \frac{N}{1 + d \cdot n}$

b) Desconto Comercial Simples: D_{cs}

Por “fora” ou “bancário”

O $D_{cs} = J.S.$ calculado sobre o valor nominal do título

$$D_{cs} = N \cdot d \cdot n$$

$$A_c = N - D_{cs}$$

$$A_c = N(1 - d \cdot n)$$

Nota: O D_{cs} é o único utilizado na prática comercial e bancária.

$i > d$ no D_{cs}

$d =$ taxa de D_{cs} (aplicada sobre N)

$i =$ taxa de J.S. aplicada sobre A_c

i é tal que **$N = A_c (1 + i \cdot n)$**

Nota : $i > d$

Fórmula: $i = \frac{d}{1 - d \cdot n}$

Demonstração

$$1) D_{cs} = N dn \longrightarrow A_c = N(1-dn)$$

$$2) J.S. \quad A_c i n = N dn \longrightarrow i = \frac{Nd}{N(1-dn)} = \frac{d}{1-dn}$$

Exercícios

- 1) Uma letra sofre um desconto simples “por dentro”, 6 meses antes do vencimento. Sabendo que o valor nominal e o valor atual são inversamente proporcionais a 50 e 53, respectivamente, calcule a taxa anual.

Resolução:

$$N=1/50 \text{ e } A_r = 1/53$$

$$A_r = \frac{N}{1+dn} \Rightarrow \frac{1}{53} = \frac{1/50}{1+0,5d} \Rightarrow 50 + 25d = 53 \Rightarrow d = 0,12$$

$$n = 6/12 = 0,5$$

- 2) Qual a taxa de juros simples mensal correspondente à taxa de desconto de 20% a.m.?

- 3) Qual a taxa anual de desconto comercial equivalente à taxa de juros simples de 40% a.a. numa operação com vencimento em 3 meses?

Resolução:

$$\text{Dados} \begin{cases} d = ?(\text{anual}) \\ i = 40\% \text{ a.a.} \\ n = 3 \text{ meses} = 3/12 = 1/4 \text{ ano} \end{cases} \quad i = \frac{d}{1-dn} \Rightarrow 0,4 = \frac{d}{(1-0,25d)} \Rightarrow d = 36,36\%$$

- 4) Dois títulos com vencimentos para 30 e 60 dias foram descontados às taxas de 68,40% a.a. e 62,40% a.a., respectivamente, verificando-se um desconto total de 26.500. Sabendo-se que foi utilizado o D_c simples e que o valor do 1º título é a metade do valor do 2º título, qual é o valor(nominal) de cada título?

Resolução:

$$N_1 = N_2/2 \quad N_2 = 2N_1 \quad N_1 \cdot d \cdot n + 2N_1 \cdot 0,001733 \cdot 60 = 26.500$$

$$N_1 = 100.000 \quad N_2 = 200.000$$

5) Um título de valor nominal 70,40 e vencimento para 5 meses, substituído por outro de valor nominal 66, com vencimento para 2 meses. Qual a taxa de D_{cs} utilizada na operação?

Resolução:

$$A = N - D = N - Ndn$$

V.A. do plano A = V.A. do plano B

$$70(1-5d) = 66(1-2d) \quad d = 0,02 \text{ a.m.} = 2\% \text{ a.m.}$$

6) Um título de 720, vencível em 2 meses e outro de 960, vencível em 3 meses devem ser substituídos por um único título vencível em 4 meses. Sabendo que a taxa de desconto é de 1,2% a.m., qual o valor nominal do título único?

Resolução:

$$720(1-0,012 \cdot 2) + 960(1-0,012 \cdot 3) = X(1-0,012 \cdot 4) \quad X = 1.710,15$$

7) A diferença entre o D_c simples e o D_r simples de um título vencível em 150 dias é de 12. Sabendo-se que a taxa utilizada nos dois descontos foi de 2% a.m., calcule:

- a) o D_c b) o D_r c) o valor nominal d) o valor atual no D_r
- e) o valor atual no D_c

Desconto Composto

1) D_{rc} (Por Dentro)

O D_{rc} consiste numa aplicação sucessiva do D_{rs} , logo, o D_{rc} é igual ao juro composto calculado sobre o valor atual do título (A_r).

$$N = A_r(1+d)^n \qquad A_r = \frac{N}{(1+d)^n}$$

2) Desconto Comercial Composto D_{cc} (por fora)

O D_{cc} consiste numa aplicação sucessiva do desconto comercial simples (D_{cs}).

$$\boxed{A_n = N(1-d)^n}$$

i x d no D_{cc}

d= taxa de D_{cc} (aplicada sobre N)

i= taxa de J.C. aplicada sobre A_c

$$N = A_c (1+i)^n \rightarrow N = N(1-d)^n (1+i)^n \rightarrow i = \frac{d}{1-d}$$

Nota : D_{rs} X D_{cs}

Exercícios

1) O D_{rc} de um título de 50.000 foi de 12.689,22. Sendo de 5 % a.m. a taxa de desconto, qual foi o prazo de antecipação?

2) Um título de valor nominal igual a 500, vencível em 3 anos, é resgatado à taxa de desconto comercial composto de 20% a.a. capitalizados semestralmente. Qual o valor atual do título?

Resolução:

N= 500

$$A_c = N(1-d)^n = 500 (1-0,1)^6 = 265,72$$

N=3 anos

$d_{cc} = 20\%$ a.a. cap. semestralmente

3) Qual a taxa de juros compostos equivalente à taxa de D_{cc} de 20% a.a.?
Resolução:

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0,2}{1-0,2} = 0,25$$

4) Qual a taxa de D_{cc} equivalente à taxa de juros compostos de 5% a.a.?

Rendas Certas

Objetivos:

Amortizar um empréstimo

Constituir um fundo.

-Imediata

1) Postecipada (ordinária)

2) Antecipada

- Diferida (c/ carência)

a) Renda certa postecipada

M= montante da renda

R= prestação (valor de cada pagamento)

n= número de prestações

i= taxa de J.C.

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n =$$

$$M = R (1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \dots + R(1+i)^1 + R$$

Colocando R em evidência e usando a fórmula da soma dos termos da P.G.

$$M = R \left[\frac{1((1+i)^n - 1)}{1+i-1} \right] = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad \text{ou} \quad M = R \times \text{FAC}(i,n), \quad \text{onde} \quad \text{FAC}(i,n) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{é}$$

o Fator de Acumulação de Capital.

Valor Atual (C)

$$M = C(1+i)^n$$

$$R \times \text{FAC}(i,n) = C(1+i)^n \quad C = \frac{R \cdot \text{FAC}(i,n)}{(1+i)^n} \quad C = R \cdot \text{FVA}(i,n)$$

$$\text{Onde} \quad \text{FVA}(i,n) = \frac{\text{FAC}(i,n)}{(1+i)^n} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \quad \text{é o fator de valor atual.}$$

Exercícios

1. Uma financeira cobra a prestação de 121,49 u.m para cada 1.000 u.m. financiados, numa operação com 20 prestações mensais. Qual é a taxa?

Resolução:

$$\begin{aligned} R &= 121,49 & C &= R \times \text{FVA}(i,n) \\ C &= 1.000 & \text{FVA}(i,20) &= \frac{1.000}{121,49} = 8,23113 & i &= 10,5\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= 20 \\ i &= ? \end{aligned}$$

2. Um aparelho elétrico custa 500.000 u.m. à vista. Uma loja o está financiando por 200.000 u.m. de entrada mais 20 prestações mensais de 38.400 u.m.. Qual é a taxa mensal cobrada pela loja na parte financiada?

Resolução com HP-12C:

$$f - \text{clear} - \text{fin} - g - \text{END} - 300.000 - \text{PV} - 38.4000 - \text{CHS} - \text{PMT} - 20 - n - i$$

3. Um cidadão deposita no final de cada mês e durante 6 meses, a quantia de 8.000 u.m. num investimento que lhe rende 9% a.m. Qual o saldo acumulado no final do 7^o mês? E no final do 10^o mês?
4. É dada uma renda com 18 termos iguais a 100 u.m. e taxa igual a 21,38% a.t. Calcule os montantes no final de 18 períodos e no final de 21 períodos.
5. O Sr. X resolveu fazer 10 aplicações mensais como segue:
- 5 prestações iniciais de 1.000 u.m. cada uma
 - 5 prestações restantes de 2.000 u.m. cada uma.

Sabendo que esta aplicação proporcionará um rendimento de 5% a.m., calcule o saldo acumulado no final do 10^o mês.

Resolução:

$$M_{10} = 1.000 \times \text{FAC}(5\%,5) \times (1+0,05)^5 + 2.000 \times \text{FAC}(5\%,5) \quad \text{ou}$$

$$M_{10} = 1.000 \times \text{FAC}(5\%,10) + 1.000 \times \text{FAC}(5\%,5)$$

6. Deseja-se obter o montante de 106.000 u.m. através de uma renda postecipada na qual cada termo é igual a 4.500 u.m., sendo de 2% a.m. a taxa de juros. Projete um fluxo de caixa que satisfaça a essas condições.
7. Um terreno está sendo vendido por 500.000,00 à vista ou em 36 pagamentos mensais, sem entrada, de acordo com o seguinte plano:
- 12 prestações iniciais de 18.000,00
 - 12 prestações seguintes de 22.000,00
 - 12 prestações restantes de 26.000,00

Uma pessoa está na dúvida: adquire o imóvel à vista ou aplica este valor numa instituição financeira que lhe garante uma taxa de 2,75% a.m., com retiradas mensais para o pagamento das 36 prestações.

O que é mais vantajoso para a pessoa interessada?

Rendas Antecipadas

Montante (M):

$$M = R (1+i)^n + R (1+i)^{n-1} + \dots + R(1+i)$$

$$M = R(1+i) \times \text{FAC} (i, n)$$

$$\mathbf{M = R \times \text{FAC} (i,n) \times (1+i)}$$

Valor Atual (C):

$$M = C(1+i)^n$$

$$R \times \text{FAC} (i,n) \times (1+i) = C (1+i)^n$$

$$\mathbf{C = R \times \text{FVA}(i,n) \times (1+i)}$$

Qual o menor investimento que deve se fazer hoje para ter um rendimento de 10.000 reais no final de cada um dos próximos 8 anos, a uma taxa de 10% a.a.

Resolução:

$$\mathbf{C = 10.000 \times \text{FVA} (10\%,8)}$$

Exercícios

1. Quanto deve-se aplicar mensalmente, a partir de hoje, para acumular no final de 36 meses o montante de 300.000 u.m., sendo de 2,5% a.m. a taxa contratada?

Resolução:

$$M = R \times \text{FAC} (2,5\%, 36) (1+2,5\%)$$

Com HP-12C:

f- clear - fin - G – BEG –36 – n – 300.000 – FV – 2,5 – i - PMT

2. Um aparelho foi pago em 24 prestações mensais e antecipadas de 5.054,03 cada uma. Sendo de 3,5% a.m. a taxa de juros cobrada, calcule o valor financiado.

3. Uma dívida de 10.000,00 é amortizada em 14 prestações trimestrais e antecipadas de 860,00, Qual é a taxa de juros?

Resolução com HP-12C:

f – clear – fin - PV -10.000 – n- 14 – 860 – CHS – PMT – g – BEG - i

4. Um terreno cujo valor à vista era de 180.000 u.m. foi financiado em 10 prestações bimestrais e antecipadas. Qual é o valor de cada parcela, se a taxa de juros foi de 34% a.a.?

Resolução:

$$1) 1+i = (1+i_6)^6 \quad 1+0,34 = (1+i_6)^6 \quad i_6 = 5\% \text{ a.b.}$$

$$2) C = R \times FVA(i, n) \times (1+i)$$

$$180.000 = R \times FVA(5\%, 10) \times 1,05$$

$$R =$$

5. Quantos depósitos trimestrais e antecipados de 1.000 u.m. são necessários para se construir o fundo de 10.000 u.m. , à taxa de 5% a.t.?

Rendas Diferidas

M= carência (ou diferimento)

N= número de prestações

$$M = R \times FAC(i, n)$$

$$C_0 = \frac{R \cdot FVA(i, n)}{(1+i)^m}$$

Exercícios

- 1) Qual o valor atual de uma renda com 10 termos trimestrais de 200 u.m. cada um e 9 meses de carência, sendo 5% a.t. a taxa de juros.

Resolução:

$$C_0 = \frac{200 \times FVA(5\%, 10)}{(1,05)^3} = \frac{1544,34}{(1,05)^3} = 1.334$$

- 2) Um empréstimo de 100.000 u.m. é amortizado em 12 prestações trimestrais com 2 anos de carência. Sendo 4,5% a.t. a taxa, calcule o valor das prestações.
- 3) O Sr. Y adquire um imóvel para ser pago da seguinte maneira: 12 prestações mensais e iguais de 1.200.000 u.m. cada uma, vencendo a 1ª prestação 120 dias após a assinatura do contrato. Sendo de 5% a.m. taxa cobrada, calcule o valor financiado.

Rendas Perpétuas (Perpetuidades)

Renda Perpétua Postecipada (R.P.P)

$$C = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{R}{i} \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

$$C_0 = \frac{R}{i}$$

Renda Perpétua Antecipada

$$C = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \times (1+i)$$

$$C_0 = \frac{R}{i} (1+i)$$

Exercícios:

- 1) Um imóvel é alugado por 5.000 mensais. Se a taxa de juros corrente no mercado é de 2% a.m., qual o valor do imóvel?

Resolução:

$$C_0 = \frac{5.000}{0,02} = 250.000$$

- 2) Um imóvel avaliado em 1.000.000 é alugado por 15.000 mensais, pagos adiantados. Qual a taxa de juros cobrada?

Resolução:

$$C_0 = \frac{R}{i}(1+i) \Rightarrow 1.000.000 = \frac{15.000 \cdot (1+i)}{i} \qquad i = \frac{15.000}{985.000} = 0,01 = 1\%$$

- 3) O preço à vista de um imóvel é de 500,00. Se a taxa corrente de juros é de 0,6% a.m., por quanto alugo esse imóvel supondo:
- aluguel pago no fim de cada mês
 - aluguel pago no início de cada mês

4) Supondo uma taxa corrente de juros de 1% a.m., quanto devo investir mensalmente, durante 15 anos, para obter, no fim deste prazo, uma renda perpétua de 40,00?

Resolução:

$$1) C = \frac{40}{0,01} = 4.000 \qquad 2) 4.000 = R \times \text{FAC}(1\%, 180) \qquad R = ?$$

Equivalência de Fluxos de Caixa

- Determine X para que os fluxos de caixa abaixo sejam equivalentes a 11% a.m.
- Uma financeira realiza operações de financiamento com a taxa efetiva de 10% a.m. Qual o valor da prestação para um financiamento de 100.000 u.m. pago em 12 meses, nas seguintes modalidades:
 - prestações mensais
 - prestações trimestrais
- Uma propriedade está sendo vendida por 2.500.000 u.m. , sendo 50% deste valor financiado em 1 ano à taxa de 9% a.m., através dos seguintes planos:

a) 12 prestações mensais de 80.000 u.m. mais dois reforços semestrais iguais.

b) 12 prestações mensais iguais mais 2 reforços semestrais de 300.000 u.m.

Calcule os reforços no plano a) e o valor das prestações no plano b), para que os planos sejam equivalentes a 9% a.m.

4. Determine o valor da prestação constante R que torna os fluxos de caixa abaixo equivalentes a 10% a.a.

Valor Atual Líquido de um Fluxo de Caixa Qualquer

Chama-se valor atual líquido de um fluxo de caixa genérico ao número $\Delta C(i)$ dado por:

$$\Delta C(i) = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{(1+i)^k}$$

Obs: Nas calculadoras financeiras $\Delta C(i) = NPV$

Ex:

5. Transforme em um fluxo uniforme equivalente os fluxos de caixa abaixo, considerando as respectivas taxas:

a) $i = 6\%$

b) $i = 7\%$

Cálculo de $\Delta C(i)$ c/ HP – 12c

a) 1) $f - \text{clear} - \text{Fin}$ 2) $100 - \text{CHS} - \text{G} - \text{Cfo}$ 3) $11 - \text{CHS} - \text{G} - \text{Cfj}$

4) $14 - \text{CHS} - \text{G} - \text{Cfj}$ 5) $46 - \text{G} - \text{Cfj}$ 6) $6 - i - f - \text{NPV}$

b) 1) $f - \text{clear} - \text{Fin}$ 2) $150 - \text{CHS} - \text{G} - \text{Cfo}$ 3) $5 - \text{CHS} - \text{G} - \text{Cfj} - 2 - \text{G} - \text{Nj}$

4) $8 - \text{CHS} - \text{G} - \text{Cfj} - 2 - \text{G} - \text{Nj}$ 5) $12 - \text{G} - \text{Cfj}$ 6) $7 - i - f - \text{NPV}$

Taxa Interna de Retorno (TIR)

Na Hp – IRR

A TIR de um fluxo de caixa é a taxa “i” tal que $\Delta C(i) = 0$

1) Qual a taxa interna de retorno nos seguintes fluxos de caixa.

a)

C/ Hp-12c

1) f – clear – FIN 2) 10000 – CHS – G – Cfo 3) 0 – G – CFj – 19 – G – Nj

4) 76000- G – CFj 5) F - IRR

b)

c)

d)

e)