IV) Séries

Teoremas muito importantes:

1) Se $\sum a_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ lim $a_n = 0$; Assim, temos:
Se $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n DIVERGE$

2) Se $\sum |x_n|$ CONVERGE $\Rightarrow \sum x_n$ CONVERGE ; Assim, temos:
Se $\sum x_n$ DIVERGE $\Rightarrow \sum |x_n|$ DIVERGE

3) $a_n \leq b_n \Rightarrow \begin{cases} \sum b_n CONVERGE \Rightarrow \sum a_n CONVERGE \\ \sum a_n DIVERGE \Rightarrow \sum b_n DIVERGE \end{cases}$

4) $\sum \frac{1}{n^p} \Rightarrow \begin{cases} CONVERGE \rightarrow p > 1 \\ DIVERGE \rightarrow p \leq 1 \end{cases}$

5) Critérios para verificar se uma série converge ou diverge
5.1) Critério da Razão

$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, se L >1 a série diverge, se L < 1 a série converge, se L=1 nada podemos afirmar.

5.2) Critério da Raiz

L = $\lim \sqrt[n]{a_n}$, se L >1 a série diverge, se L < 1 a série converge, se L=1 nada podemos afirmar.

5.3) Critério da Comparação por limite

$$L = \lim \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \begin{cases} L = n^\circ real \neq 0 \Rightarrow AMBAS, CONVERGEM, OU, DIVERGEM \\ L = 0, se \sum b_n CONVERGE \Rightarrow \sum a_n CONVERGE \\ L = \infty, se \sum b_n DIVERGE \Rightarrow \sum a_n DIVERGE \end{cases}$$

1) Séries de Potência : $\sum C_n (x - x_0)^n$

Raio de Covergência $\quad r = \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|}$

$r = \infty \Rightarrow$ a série converge para qualquer valor de x

$r = 0 \Rightarrow$ converge para x = x_0 e diverge para todas as demais escolhas do real x.

$$r = consante \Rightarrow \begin{cases} Converge \ ]x_0 - r \ , x_0 + r[\\ Diverge \ ]-\infty, x_0 - r[ou[x_0 + r, +\infty] \end{cases}$$

Questões da ANPEC:

QUESTÃO 15/2000

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

F (0) Se a série $\sum_1^\infty x_n$ for convergente, então a série $\sum_1^\infty |x_n|$ também será convergente;

V (1) Se a série $\sum_1^\infty |x_n|$ for convergente, então a série $\sum_1^\infty x_n$ também será convergente;

V (2) Sabendo-se que a série $\sum_1^\infty |x_n|$ é convergente, dada uma outra série $\sum_1^\infty y_n$ cujo termo geral satisfaz à propriedade $|y_n| \le |x_n|$ para todo inteiro natural n, podemos afirmar que $\sum_1^\infty y_n$ também é convergente;

F (3) Se a sequência $\{y_n\}$ atender à propriedade $|y_n| \le 1/n$ para todo inteiro natural n, então a série $\sum_1^\infty |y_n|$ será convergente

QUESTÃO 08/2001

A respeito das séries abaixo, assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

V A série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ é convergente;

F A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{Fat(n)}$, onde $Fat(n) \equiv n(n-1)(n-2)...4.3.2.1$, é convergente para todo $X \in R$;

V A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + ...$ é convergente

F A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{12}} + ...$ é divergente;

F A série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt[n]{n}$ é convergente.

QUESTÃO 10 /2002

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

V Se $0 < a < b < 1$, então a série $a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + ...$ é convergente.

V A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{a^n}$ é convergente para todo $a > 1$.

F A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n} \right)^n$ é divergente.
