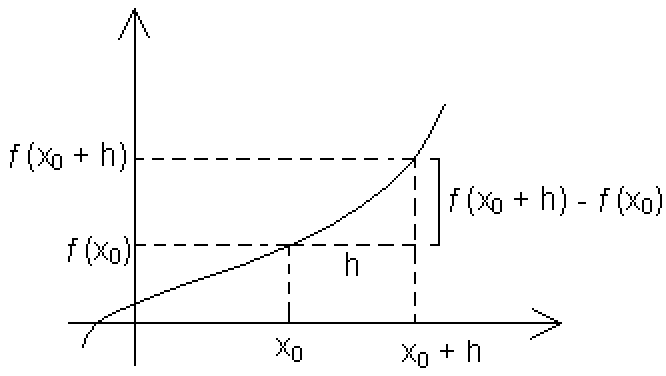
Lista 2 – Derivadas

Definição:



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \begin{cases} x = x_0 + h \\ h \to 0 \Rightarrow x \to x_0 \end{cases}$$

Exemplos:

1) $\lim_{a\to 0}\dfrac{cos(x+a)-cos\,x}{a} = -sen\,x$

2) $\lim_{x\to a}\dfrac{sen\,x - sen\,a}{x-a} = cos\,x$

Propriedades:

1) $y = u+v \Rightarrow y' = u'+v'$

$y = u-v \Rightarrow y' = u'-v'$

2) $y = u.v \Rightarrow y' = u'.v = v'.u$

3) $y = u/v \Rightarrow y' = \dfrac{(u'v-v'u)}{v^2}$

4) $y = g^n \Rightarrow y' = n\,g^{n-1}\,g'$

5) $f = a^x \Rightarrow f' = a^x\,lna$

$f = a^g \Rightarrow f' = a^g g'\,lna$

6) $f = log_a x \Rightarrow f' = \dfrac{1}{x}log_a e = \dfrac{1}{x\,ln\,a}$

$f = log_a g \Rightarrow f' = \dfrac{g'}{g\,ln\,a}$

7) $f(x) = u[v(x)] \Rightarrow f'(x) = u'(v).v'(x)$

Derivação Implícita

1) $Ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2Ey + F = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Fx}{Fy} = -\frac{2ax + 2by + 2d}{2bx + 2cy + 2E}$$

2) $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Fx}{Fy} = \frac{-4x^3 + 12xy^2 + 10x}{-12x^2y + 36y^3 + 30y}$$

3) $x^y - y^x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Fx}{Fy} = \frac{-yx^{y-1} + y^x \ln y}{x^y \ln x - xy^{x-1}}$$

4) $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Fx}{Fy} = \frac{-e^x + y.2^{xy}.\ln 2}{e^y - x.2^{xy}.\ln 2}$$

ANPEC 94) $\frac{xz^z}{(x+y)} + y = 0$; Pede-se $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(-1,2,2)}$

ANPEC 95) $\frac{z^2 \cos x}{y+1} = x + 1 + \ln(1+y)$; Pede-se $\left.\frac{dz}{dy}\right|_{(0,0,1)}$

Aplicações

ANPEC – Questão 9/1999.

Tem-se a seguinte função de produção $z = f(x,y,w) = x^2 + x(w-y) + wy$.
Em um ponto em as produtividades marginais de x e y são 3 e 1, respectivamente, qual deve ser a quantidade de w para que a produção total seja 4?

Ora, $PMgx = \frac{\partial z}{\partial x}$ e $PMgy = \frac{\partial z}{\partial y}$

Com efeito, temos:

$$PMgx = -\frac{Fx}{Fz} = -\left(\frac{2x+(w-y)}{-1}\right) = 3 \quad \Rightarrow \quad 1)\ 2x + w - y = 3$$

$$PMgy = -\frac{Fy}{Fz} = -\left(\frac{-x+w}{-1}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2) - x + w = 1 \Rightarrow x = w - 1$$

Substituindo a equação $2)\ x = w - 1$, na equação 1) $2x + w - y = 3$, temos:

$2(w-1) + w - y = 3 \Rightarrow y = 3w - 5$

Em busca de w. Ora, basta substituir x e y que estão em função de w na função de produção. Deste modo, temos:

$(w-1)^2 + (w-1)(w-3w+5) + w(3w-5) = 4 \Rightarrow w = 2$

ANPEC 8/1999

Tem-se uma curva de demanda de elasticidade constante, $qp^x = 800$. Se a oferta é fixa em 100 unidades e a elasticidade da demanda é –1,5, qual é o preço de equilíbrio do mercado?

Ora, $Epq = \frac{p}{q}.\frac{dq}{dp} = \frac{-q^x p^{x-1}}{p^x}\frac{p}{q} = -x = -1{,}5 \Rightarrow x = 1{,}5 \Rightarrow p = 4$

Derivação com respeito ao limite superior de integração

1) $F(t)=\int_{-1}^{x}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}$

2) $F(t)=\int_{e}^{x}\frac{1}{1+sen^2 t}dt \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{1+sen^2 x}$

3) $F(t)=\int_{x}^{1}\frac{1}{1+sen^2 t}dt = -\int_{1}^{x}\frac{1}{1+sen^2 t}dt \Rightarrow F'(x)=\frac{-1}{1+sen^2 x}$

4) $F(t)=\int_{1}^{x^5}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt \Rightarrow F'(x)=-\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2(x^5)}.5x^4$

5) $F(t)=\int_{1}^{\operatorname{sen} x}\frac{1}{1+x^4}dx \Rightarrow F'(x)=-\frac{1}{1+(\operatorname{sen} x)^4}.\cos x$

6) $F(t)=\int_{-5}^{\operatorname{sen} x+e^x}\frac{1}{1+t^4}dt \Rightarrow F'(x)=-\frac{1(\cos x+e^x)}{1+(\operatorname{sen} x+e^x)^4}$

7) $F(t)=\int_{x^3}^{x^2}\frac{1}{1+t^4}dt = \int_{x^3}^{-1}\frac{1}{1+t^4}dt+\int_{-1}^{x^2}\frac{1}{1+t^4}dt = -\int_{-1}^{x^3}\frac{1}{1+t^4}.dt+\int_{-1}^{x^2}\frac{1}{1+t^4}$

$\Rightarrow F'(x)=\frac{-1}{1+(x^3)^4}.3x^2+\frac{1}{1+(x^2)^4}.2x$

Questão 08/1998

A função $y:R\rightarrow R$ definida por $y(x)=\int_{x}^{4x^2}3^{\sqrt{t}}dt$. Calcule $\frac{dy}{dx}$ p/ $x=1$

Ora, $\frac{d\int_{const}^{f(x)}f(t)\,dt}{dx} = f(f(x)).\frac{df(x)}{dx}$

$y(x)=\int_{x}^{4x^2}3^{\sqrt{t}}dt = -\int_{k}^{x}3^{\sqrt{t}}dt+\int_{k}^{4x^2}3^{\sqrt{t}}dt \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{4x^2}}.8x \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=-3+3^2.8=69$