V) Teorema de Euler para funções homogêneas

$x f_x + y f_y + z f_z = n f(x, y, z)$

Exemplo: $f(x,y,z)= A x^2 + Bxy + Cy^2$

Ora, $x f_x = x(2xA) + x(By)$; $y f_y = y(B_x) + y(2yC)$

$x f_x + y f_y = 2 A x^2 + 2 Bxy + 2 Cy^2 = 2 f(x,y,z)$

Ora, f(x,y,z) é homogênea do grau n se e somente se $f(kx, ky, kz) = k^n f(x, y, z)$

Questões da ANPEC:

Questão 9/1998

Seja a função $F:\Re^3 \to \Re$ homogênea do 3º grau, e diferenciável. Dados $F(2,4,6,) = 16/3$, e as derivadas parciais $F_1(2,4,6) = 8/3$ e $F_2(3,6,9) = 1$, responda V ou F:

F (0) $F(3,6,9) = 9$.
V (1) $F_1(3,6,9) = 6$.
F (2) $F_3(2,4,6) = 40/27$.

QUESTÃO 11/2001

A respeito das funções $R^n \to R$ abaixo assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

V Dada $f : R^3 \to R$, definida por $f(x, y, z) = e^{2x} . \sqrt{y+z}$, então o vetor gradiente de f no ponto $(0,4,0)$ é $\nabla f(0,4,0) = (4, 1/4, 1/4)$;

V Dada uma função $g : R^3 \to R$ diferenciável homogênea do terceiro grau, sabe-se que no ponto $(1, 2, 6)$ o vetor gradiente de g é $\nabla g(1,2,6) = (2,2,1)$. Conclui-se que o valor de g neste ponto é $g(1,2,6) = 4$;

F Dada uma função $h : R^2 \to R$ diferenciável, para cada ponto $x \in R$ associa-se implicitamente um ponto $y \in R$ por meio da expressão $h(x, y) = y^2$. Sabendo-se que no ponto $(3,2) \in R^2$ o vetor gradiente de h é $\nabla h(3,2) = (3, 1)$, então a derivada $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3}$ é igual a 2 (dois);

V Dada a função $f: R^2 \to R$, definida por $f(x,y) = xy$, define-se uma nova função $F: R \to R$ pela regra: $F(u) =$valor máximo de $f(x,y)$ sujeito à restrição $x^2/2 + y^2/3 \le u^2$. Então a derivada dF/du calculada no ponto $u = \sqrt{3/2}$ é igual a 3;

F O conjunto dos pontos em que a função $h: R^2 \to R$, definida por $h(x,y) = xye^{-xy}$, atinge seu valor máximo é uma parábola.

QUESTÃO 13/2002

Considere a função $F: \Re^3 \to \Re$ diferenciável e $\nabla F(x)$ denotando o gradiente de F no ponto $x \in \Re^3$. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

V Sabendo-se que F é estritamente côncava, e que no ponto $(1,2,3)$ tem-se $F(1,2,3) = 0$ e $\nabla F(1,2,3) = (3,4,5)$, conclui-se que seu valor no ponto $(2,3,4)$ satisfaz a $F(2,3,4) < 12$.

V Se F for homogênea do segundo grau e no ponto $(2,6,10)$ seu gradiente for $\nabla F(2,6,10) = (1,1,4)$, conclui-se que seu valor no ponto $(1,3,5)$ é igual a $F(1,3,5) = 6$.

F Dados o plano $P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Re^3; 2x_1 + x_2 + x_3 = 9\}$ e a superfície $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Re^3; F(x_1, x_2, x_3) = 9\}$, Se no ponto $(1,2,5)$ tiver-se $F(1,2,5) = 9$ e $\nabla F(1,2,5) = (1,1,1)$, conclui-se que o plano P é tangente à superfície S no ponto $(1,2,5)$.