<u>Álgebra Linear</u>

- Base é gerador e LI e é o mais econômico de todos os geradores.
- Dimensão é o número de vetores da base.
- Posto é a dimensão do espaço coluna da matriz.
- Nulidade é a dimensão do seu espaço nulo, a dimensão do espaço solução AX= 0

Matriz Escalonada linha-reduzida

1) Toda linha não-nula começa com um 1 (um líder)
2) Todo "um líder" de uma nova linha abaixo ocorre a direita de todos um-líderes anteriores
3) O um líder é o único elemento não-nulo em sua coluna

<u>Nulidade de A</u> = número de variáveis livres = n – Posto = número de colunas (número de variáveis) – número de linhas não-nulas em sua forma Escalonada.

<u>Consistência</u>
Posto da Matriz dos coeficientes = Posto da Matriz aumentada
<u>Indeterminado</u>
n^0 de incognitas> n^0 de equações.

Seja $W \neq 0$, W C V (espaço vetorial), W é subespaço de V sse:

1) W_1 E W e W_2 E W então $W_1 + W_2$ E W
2) cW E W, para todo escalar c e todo W E W

OBS:
1) $W \supset 0$
2) Intersecção de subespaços é subespaço, mas a união de subespaços não precisa ser.
3) Num sistema homogêneo, o conjunto solução é um subespaço do R^n quando pensamos $A_{mxn} . X_{nx1} = B_{mx1}$

Span (Ω) é o conjunto de todas as combinações lineares de Ω
Quando Ω C V (espaço vetorial dado) e Span Ω = V , dizemos que Ω é um conjunto gerador de V.

Um mesmo espaço vetorial V pode admitir diversos conjuntos geradores diferentes, com diversas cardinalidades.

Conjunto LI e LD

O conjunto $\psi = \{v_1, \ldots\ldots\ldots, v_p\}$ será dito LI sse
$\lambda_1 v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda n V_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots\ldots\ldots = \lambda_n = 0$
O conjunto $\psi = \{v_1, \ldots\ldots\ldots, v_p\}$ será dito LD sse
existe (pelo menos um) combinação linear de todos os vetores de ψ ,
tal que $\lambda_1 v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda n V_n = 0$ com pelo menos algum $\lambda_i \neq 0$ garantidamente.
Obs: Se possuir o vetor nulo será forçosamente LD

Base

Sejam V um espaço vetorial e B um subconjunto não vazio de V. B é dito base de V sse: 1) Span (B) = V 2)B é LI
Se todo vetor de um espaço linear R pode ser representado em forma de uma combinação linear de vetores LI :
e_1, e_2 , ..., $e_{n.}$
Então d (R) = n, e por conseguinte, os vetores e_1, e_2, ..., e_n formam uma base do espaço R.

Função Linear, Transformação Linear ou Aplicação Linear
T: V $\rightarrow W$, sendo V e W espaços vetoriais, é dita linear sse:
1) T ($V_1 + V_2$) = T(V_1) + T(V_2)
2) T (&V) = & T (V)

Ker (núcleo) de T é subespaço do 1^0 espaço V: Ker T = $\{v \in V / T(v) = \overrightarrow{0_{LÁ}}\}$, Ker T C V
Núcleo é o conjunto de todas as primericolas que flecharem o nulo Lá.
1) Se Ker T = $O_{cá}$ é o núcleo trivial
2) Im T é subespaço de W
3) Ker T é subespaço de V
4) T é injetora então Ker T = $O_{cá}$
5) Ker T = 0 então T é injetora

Dim Ker T + Dim Im T = Dim V, isto é , Nulidade + Posto = número de colunas

Fato fundamental das transformações lineares:
O que ela faz com "os da Base" , faz com todos os outros.

Similaridade e Matriz diagonalizável

(A~B) sse existe P inversível (det $\neq$ 0) tal que
$A= P^{-1} . B . P$

A será dita matriz diagonalizável sse A for semelhante a alguma matriz diagonal.
($A=P^{-1}.D.P$), onde P é uma matriz cujas colunas são n autovetores LI e D é uma matriz diagonal onde, na diagonal, estão os autovalores.
Similaridade não é a mesma coisa que linha equivalência. Se A é equivalente a B, então B = E.A
1)Se A é inversível, a equação Ax = 0 admite apenas a solução trivial, e as colunas de A formam um conjunto LI. Se A for singular (det=0) formam LD.
2) Se A e B são matrizes similares
$A= P^{-1} . B . P$ ou $B= P. A . P^{-1}$ então elas têm o mesmo polinômio característico e, portanto, os mesmos autovalores (com as mesmas multiplicidades).
A é diagonalizável sse existem autovetores suficiente para formar uma base para o R^n.
3) Uma matriz nxn com n autovalores distintos é diagonalizável. (condição suficiente, mas não necessária)
Sejam v_1, ..., v_n autovetores associados aos n autovalores distintos da matriz A Então $\{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n\}$ é LI, portanto A é diagonalizável.
4) A matriz é diagonalizável sse a soma das dimensões dos auto-espaços distintos é igual a n, e isso acontece sse a dimensão do autoespaço para λ_k for igual a multiplicidade de λ_k.

Matriz simétrica

Uma matriz A nxn simétrica tem as seguintes propriedades;
a. A tem n autovalores reais, contando multiplicidades

b. A dimensão do auto-espaço correspondente a cada autovalor λ é igual à multiplicidade de λ como raiz da equação característica.
c. Os auto-espaços são ortogonais entre si, no sentido de que os autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais
d. A é diagonalizável por matriz ortogonal.

OBS:
1) Se A é simétrica ($A^t = A$), quaisquer autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.
2) Uma matriz A_{mxn} é diagonalizável por matriz ortogonal sse A é simétrica.
3) Quando há 2 autovetores LI asssociados a um autovalor. É uma beleza que eles sejam LI. Mas, ao deixarem de ser correspondentes a autovalores distintos deixam de ser, também, automaticamente ortogonais. Para formar uma base de autovetores ortogonal precisaremos antes ortogonolizar esses vetores LI correspondentes ao mesmo autovetor (Gram Schmidt) e , em seguida, normalizar a base.

<u>Autovalor e Autovetor</u>

X é autovetor relativo ao autovalor $\lambda \in R$ do operador A sse $x \neq 0$ e $A x = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I) x = 0$, tem solução não-trivial (variável livre – colunas LD) sse det $(A - \lambda I) = 0$ (equação característica)
Se $V_{1,}$, ...V_r são autovetores associados a autovalores distintos $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_r$ de uma matriz A_{nxn}, então o conjunto $V_{1,}$ ....V_r é LI

Formas Quadráticas e Autovalores

Se A é uma matriz simétrica nxn , a forma quadrática $Q(x) = x^t A x$ é uma função com valores reais definida em todo o R^n.

O exemplo mais simples de uma forma quadrática não-nula é $Q(x) = x^t I X = \|x\|^2$

Seja A uma matriz simétrica nXn . Então a forma quadrática $x^T x$ é:

a . positiva definida sse todos os autovalores de A são positivos

b. negativa definida sse todos os autovalores de A são negativos

c. indefinida sse a tem autovalores positivos e negativos.

Dada uma matriz quadrada (nxn) cujo det$\neq 0$. São equivalentes:

1) linhas de M são LI
2) Colunas de M são LI
3) Linhas geram R^n
4) Colunas geram R^n
5) M é inversível
6) Ker T = 0, T é o operador linear definido por M, T(X) = M X
7) Im (M) = R^n
8) M X = 0 só tem a solução trivial
9) M X = b é compatível e determinado para qualquer b
10) As colunas formam uma base do espaço R^n e as linhas também
11) Uma solução única $x = A^{-1} . b$ existe
12) Seu posto é n para ser inversível, pois possui n linhas (ou colunas) LI.
13) N + 1 vetores quaiquer desse espaço são LD

Sejam

r = Posto de M

r" = Posto da Matriz aumentada

n = número de incognitas e

m = número de equações

Se n>m indeterminado ou incompatível

$$r = m \rightarrow r = n \begin{cases} \text{sim} \rightarrow \text{determinado} \\ \text{não} \rightarrow \text{indeterminado} \end{cases}$$

$$r = r'' \begin{cases} \text{SIM} \rightarrow \text{compatível} \rightarrow r = n \begin{cases} \text{SIM} \rightarrow \text{determiando} \\ \text{Não} \rightarrow \text{indeterminado} \end{cases} \\ \text{Não} \rightarrow \text{incompatível} \end{cases}$$

Ortogonalidade

Uma matriz A, quadrada de dimensão m é dita ortogonal quando A^t . A = A . A^t = I_n
(A^{-1}=A^t)

1) Sua inversa e sua transposta são também matrizes ortogonais
2) Valor absoluto do det A = 1
3) Quando se multiplica um vetor pela matriz ortogonal, seu comprimento não se modifica

Obserações:

1) Se um autovalor é nulo a matriz é singular, Existe v $\neq$ 0 , A v = 0 v = 0, e vale a volta.

2) A é inversível sse 0 não é autovalor para A

3) SPI $\Rightarrow$det=0$\Rightarrow$não inversível$\Rightarrow$singular$\Rightarrow$Pelo menos um dos autovalores é nulo

4) O núcleo do operador linear definido pela matriz A é o vetor zero, se A for inversível.

5) Uma matriz não simétrica pode ter autovetores ortogonais, mas não serão todos ortogonais

6) Idempotente $\Rightarrow$ A^2 = A

7) Em R^3 quatro vetores quaisquer não nulos são sempre LD

8) Os autovalores de uma matriz triangular são os elementos de sua diagonal principal

8) Se V_1 e V_2 são autovetores LI, então eles correspondem a autovalores distintos.

Geometria Analítica

1) -Equação da Reta que passa por um ponto e é paralela a um vetor V

- Equação da Reta que passa por 2 pontos A e B (V = AB = B – A)
  $POP = t\ v \Rightarrow <x-xo,\ y-yo,\ z-zo>\ t <v_1,\ v_2,\ v_3>$

2) Equação geral do plano que passa por 3 pontos A, B e C
Equação geral do plano que contém um ponto A e a reta r.
$PoP.n = 0 \Rightarrow <x-xo,\ y-yo,\ z-zo>.<n1,\ n2,\ n3> = 0$, sendo n = AB X AC

3) Equação geral do plano que passa pelo ponto A e é paralelo a dois vetores V1 e V2
$POP.\ n = 0 \Rightarrow <x-xo,\ y-yo,\ z-zo>.<n1,\ n2,\ n3> = 0$, sendo $n = V_1 \times V_2$

4) Equação geral do plano π que passa por um ponto A e é paralelo ao plano π_1 de equação dada
$PoP\ .\ n = 0 \Rightarrow <x-xo,\ y-yo,\ z-zo>.<n1,\ n2,\ n3> = 0$
Como os planos são paralelos, eles têm o mesmo vetor normal.
A equação de π_1: Ax + By + C z = 0 ,
$n = <A, B, C> = n_1$

4) Distância de um ponto Po a reta r : $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$.

Área = $\|v\|.\,d = \|v\|.\|PoP\|.\operatorname{sen}\theta = \|V \times PoP\| \Rightarrow d = \frac{\|V \times PoP\|}{\|v\|}$

5) Distância entre um ponto e um plano

$$d(P,\pi) = \frac{|AP.\,n|}{\|n\|}$$

Observações:

1) Dados $V = < v_1, v_2, v_3 >$ e $W = < w_1, w_2, w_3 >$. É certo que o produto vetorial V x W é o normal ao plano desses 2 vetores dados.
2) Dois vetores não nulos são perpendiculares sse V . W =0

3) Dois vetores V e W são paralelos sse existir uma constante real não nula K tal que V = K W

4) O produto triplo misto (U . (V x W)) informa o volume do paralelepipedo. Quando o produto for zero os 3 vetores são coplanares.

5) V . W = $\|w\|.\|v\|.\cos\theta$

6) Dado um plano π de equação geral : ax +by + cz +d = 0. Prove que n = (a, b, c) é normal a π.

Tomar 3 pontos A, B e C não colineares de π.

Sejam u = AB e v = AC. Prova: u X v é paralelo a n , ou u X v = K n

7) Achar vetores direção de r e s. Duas maneiras:

1) Um vetor direção de r é o produto vetorial entre n_1 e n_2 que são as normais aos dois planos que determinam a reta

2) Um vetor direção de r é a diferença entre 2 pontos pertencentes a r.

8) Sendo π um plano, podemos selecionar 3 pontos A, B e C E π não colineares. Definimos: u = AB e v = AC. Entao, dado P E π, os vetores PoP, u, v são coplanares de modo que existem α e β tais que : PoP = α u + β v