

Análise Combinatória

Se um acontecimento pode ocorrer por várias etapas sucessivas e independentes de tal modo que:

P_1 é o número de possibilidades da 1 etapa.

P_2 é o número de possibilidades da 2 etapa.

*.
. .
. .
. .*

P_k é o número de possibilidades da K -ésima etapa, então: $p_1 \cdot p_2 \dots p_k$ é o número total de possibilidades de o acontecimento ocorrer.

Arranjos Simples

Seja $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, um conjunto com n elementos ($n \in N$)

Denomina-se arranjo simples dos n elementos de B , tomados p a p , qualquer agrupamento de p elementos distintos, escolhidos entre os elementos de B .

Indica-se:

$$A_{n,p} = A_n^p$$

Observação

Arranjo é o tipo de agrupamento em que um grupo é diferente do outro pela ordem ou pela natureza dos elementos componentes.

Fórmula do número de arranjos

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) \quad \text{ou} \quad A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Arranjos com Repetição

(Arranjos completos)

A

Combinações Simples

Seja $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, um conjunto com n elementos ($n \in \mathbb{N}$)

Denomina-se Combinação simples dos n elementos de B , tomados p a p , qualquer subconjunto de p elementos do conjunto B .

Indica-se:

$$C_{n,p} = C_n^p = \binom{n}{p}$$

Observação:

Combinação é o tipo de agrupamento em que um grupo é diferente do outro apenas pela natureza dos elementos componentes.

Fórmula das combinações Simples

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$$

Propriedades das Combinações Complementares

Permutações Simples

Seja $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, um conjunto com n elementos ($n \in \mathbb{N}$)

Denomina-se permutação simples dos n elementos de B , todo arranjo dos n elementos de B tomados n a n .

Indica-se:

$$P_n = A_{n,n}$$

Observação:

Permutação é o tipo de agrupamento ordenado no qual, em cada grupo, entram todos os elementos.

Fórmula das permutações simples

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots 1 = n!$$

Permutações com elementos repetidos

*O número de permutações possíveis com n elementos, dentre os quais um certo elemento se repete *, é igual ao fatorial de n dividido pelo fatorial de *.*

Permutações Circulares

$$(P_c)_n = (n-1)!$$

PROBABILIDADES

Historicamente, a teoria da probabilidade começou com o estudo de jogos de azar, como a roleta e as cartas.

O cálculo das probabilidades nos permite encontrar um número que mostra a chance de ocorrência do resultado desejado num experimento aleatório.

Experimentos Aleatórios

Experimentos aleatórios são aqueles que, repetidos em idênticas condições, podem fornecer resultados diferentes.

É qualquer experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso.

Fenômenos aleatórios acontecem constantemente em nossa vida diária. São frequentes perguntas tais como: choverá amanhã? Qual será a temperatura máxima no próximo domingo? Qual será o número de ganhadores da Loteria Esportiva?

Espaço Amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. A notação que vamos usar é S.

Evento

É o conjunto dos resultados desejados num experimento.

É qualquer subconjunto do espaço amostral S.

Exemplo

Lance uma moeda e um dado; seja S o espaço amostral constituído dos doze elementos :

$$S = \{ K1, K2, K3, K4, K5, K6, R1, R2, R3, R4, R5, R6 \}$$

(i) Escreva explicitamente os seguintes eventos : $A = \{\text{caras e um número par aparecem}\}$, $B = \{\text{um número primo aparece}\}$, $C = \{\text{coroas e um número ímpar aparecem}\}$.

(ii) Idem, o evento em que : (a) A ou B ocorre, (b) B e C ocorrem, (c) somente B ocorre.

(iii) Quais dos eventos A, B e C são mutuamente exclusivos ?

(i) Para obter A, escolhamos os elementos de S constituídos de um K e um número par : $A = \{K2, K4, K6\}$.

Para obter B, escolhamos os pontos de S constituídos de números primos : $B = \{K2, K3, K5, R2, R3, R5\}$

Para obter C, escolhamos os pontos de S constituídos de um R e um número ímpar : $C = \{R1, R3, R5\}$.

(ii) (a) $A \cup B = \{K2, K4, K6, K3, K5, R2, R3, R5\}$.

(b) $B \cap C = \{R3, R5\}$.

(c) Escolhamos os elementos de B que não estão em A ou C :
 $B \cap A^c \cap C^c = \{K3, K5, R2\}$

(iii) A e C são mutuamente exclusivos, porque $A \cap C = \emptyset$.

Conceito de probabilidade

A definição de probabilidade como quociente do número de “casos favoráveis” sobre o número de “casos possíveis” foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra Liber de Ludo Aleae de Girolamo Cardano (1501-1576).

Se num fenômeno aleatório as possibilidades são equiprováveis, então a probabilidade de ocorrer um evento E – $p(E)$ – é:

$$P(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Por exemplo, no lançamento de um dado, um número par pode ocorrer de 3 maneiras diferentes dentre 6 “igualmente prováveis”, portanto, $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$

Espaço Equiprovável

Dizemos que um espaço amostral E (finito) é equiprovável quando seus eventos elementares têm probabilidades iguais de ocorrência.

Assim, no experimento do lançamento de uma moeda e observação da face superior, o espaço amostral $E = \{K, R\}$ é equiprovável se $P(K) = 1/2$ e $P(R) = 1/2$.

Em geral, num espaço amostral, com n elementos, a probabilidade de um evento elementar é sempre igual ao quociente $1/n$.

Ainda: num espaço amostral S , equiprovável, de n elementos, a probabilidade de evento formado por 2 elementos é $2/n$, a probabilidade de um evento com 3 elementos é $3/n$ e assim por diante, a probabilidade de um evento com k elementos é K/n (com $K \leq n$).

Em conclusão:

Num espaço amostral equiprovável E (finito), a probabilidade de ocorrência de um evento A é sempre:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } S} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Propriedades importantes:

1) Se A e \bar{A} são eventos complementares, então:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

2) A probabilidade de um evento é sempre um número entre 0 (probabilidade de evento impossível) e 1 (probabilidade do evento certo) .

$$0 \leq p(E) \leq 1$$

Probabilidade Condicional

É muito comum que, antes da realização de um experimento, já se saiba alguma informação sobre o evento cuja ocorrência é desejada. Nesse caso o espaço amostral se modifica e o evento tem a sua probabilidade de ocorrência alterada.

Definição. Seja S um espaço amostral e sejam A e B dois eventos de S . Chama-se **Probabilidade Condicional do evento B** , a probabilidade do evento B ocorrer, sabendo que o evento A já ocorreu.

Fórmula da probabilidade condicional:

$$p(E_1 \text{ e } E_2 \text{ e } E_3 \text{ e } \dots \text{ e } E_{n-1} \text{ e } E_n) = p(E_1) \cdot p(E_2/E_1) \cdot p(E_3/E_1 \text{ e } E_2) \cdot \dots \cdot p(E_n/E_1 \text{ e } E_2 \text{ e } \dots E_{n-1}),$$

Onde:

$p(E_2/E_1)$ é a probabilidade de ocorrer E_2 , condicionada ao fato de já ter ocorrido E_1 ;

$p(E_3/E_1 \text{ e } E_2)$ é a probabilidade de ocorrer E_3 , condicionado ao fato de já terem ocorrido E_1 e E_2 ;

$p(E_n/E_1 \text{ e } E_2 \text{ e } \dots E_{n-1})$ é a probabilidade de ocorrer E_n , condicionada ao fato de já terem ocorrido E_1 e E_2 e $\dots E_{n-1}$

Exemplo.

Uma urna tem trinta bolinhas, sendo dez brancas e vinte pretas. Se sortearmos duas bolas, uma de cada vez e sem reposição, qual será a probabilidade de a primeira ser branca e a segunda ser preta?

Resolução:

Seja o espaço amostral $S: \{30 \text{ bolinhas}\}$ e consideremos os seguintes eventos:

A: branca na primeira retirada e $P(A) = 10/30$

B: preta na segunda retirada e $P(B) = 20/29$

Assim:

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B/A) = 10/30 \cdot 20/29 = 20 / 87$$

Eventos Independentes

Dizemos que E_1 e E_2 e ... E_{n-1} , E_n são eventos independentes quando a probabilidade de ocorrer um deles não depende do fato de os outros terem ou não terem ocorrido.

Fórmula da probabilidade dos eventos independentes:

$$p(E_1 \text{ e } E_2 \text{ e } E_3 \text{ e } \dots \text{ e } E_{n-1} \text{ e } E_n) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot p(E_3) \cdot \dots \cdot p(E_n)$$

Exemplo.

Uma urna tem trinta bolinhas, sendo dez brancas e vinte pretas. Se sortearmos duas bolas, uma de cada vez e repondo a sorteada na urna, qual será a probabilidade de a primeira ser branca e a segunda ser preta?

Numa urna há quatro bolas brancas e seis bolas pretas. Qual é a probabilidade de retirarmos sucessivamente uma branca e uma preta, com reposição?

Resolução:

Como os eventos são independentes, a probabilidade de sair branca na primeira retirada e preta na segunda retirada é igual ao produto das probabilidades de cada condição, ou seja, $P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B)$. Ora, a probabilidade de sair branca na primeira retirada é $10/30$ e a de sair preta na segunda retirada é $20/30$. Daí, usando o teorema do produto, temos: $10/30 \cdot 20/30 = 2/9$.

Observe que na segunda retirada foram consideradas todas as bolas, pois houve reposição.

Assim, $P(B/A) = P(B)$, porque o fato de sair bola branca na primeira retirada não influenciou a segunda retirada, já que ela foi repostas na urna.

Quando isso ocorre, dizemos que os eventos são independentes, ou seja, a ocorrência de um não influencia a ocorrência do outro.

Probabilidade de ocorrer a união de eventos

1. Fórmula da probabilidade de ocorrer a união de eventos:

$$p(E_1 \text{ ou } E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \text{ e } E_2)$$

De fato, se existirem elementos comuns a E_1 e E_2 , estes elementos estarão computados no cálculo de $P(E_1)$ e $P(E_2)$. Para que sejam considerados uma vez só, subtraímos $P(E_1 \text{ e } E_2)$.

2. Fórmula da probabilidade de ocorrer a união de eventos mutuamente exclusivos:

$$p(E_1 \text{ ou } E_2 \text{ ou } E_3 \text{ ou } \dots \text{ ou } E_n) = p(E_1) + p(E_2) + \dots + p(E_n)$$

Exemplo 1.

Se lançarmos um dado verde e um azul, qual a probabilidade de sair 5 no azul ou 3 no verde?

Resolução:

Considere os eventos:

A: tirar 5 no dado azul e $P(A)=1/6$; B: tirar 3 no dado verde e $P(B)=1/6$

Sendo S o espaço amostral de todos os possíveis resultados, temos: $n(S)=6.6=36$ possibilidades

Daí, temos: $P(A \text{ ou } B)=1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36$

Exemplo 2.

Se retirarmos aleatoriamente uma carta de um baralho com 52 cartas, qual é a probabilidade de ser um 7 ou um ás?

Resolução:

Sendo S o espaço amostral de todos os resultados possíveis, temos: $n(S)= 52$ cartas

Considere os eventos:

A: sair 7 e $P(A) = 7/52$

B: sair um ás e $P(B)= 4/52$

Assim, $P(A \text{ ou } B) = 4/52 + 4/52 - 0 = 8/52 = 2/13$

Note que $P(A \text{ e } B) = 0$, pois uma carta não pode ser 7 e ás ao mesmo tempo. Quando isso ocorre dizemos que os eventos A e B são mutuamente exclusivos.

Exercícios Resolvidos:

1. Considere dois eventos independentes e A e B de um mesmo espaço amostral. Sabendo que $P(A \cup B)=0,9$, $P(A)=0,4$ e $P(B)=x$, calcule x.

Resolução:

Sabemos, pela teoria, que:

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$.

Como A e B são independentes, temos $P(A \cap B)=P(A).P(B)$.

Isto posto, temos:

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$

$0,9 = 0,4 + x - 0,4.x$ ou $0,5 = 0,6 x$ ou $x = 5/6$

2. Numa sala estão reunidos um brasileiro, um italiano, um alemão, um inglês e um belga. Chama-se ao acaso uma das pessoas, anota-se a sua nacionalidade e pede-se que retorne a sala. Repetindo-se a operação

mais 4 vezes, a probabilidade de serem registradas nacionalidades diferentes é:

a) 24/625 b) 1/25 c) 12/625 d) 24/25 e) 4/625

Resolução

O número de formas em que as pessoas podem ser chamadas é 5.5.5.5.5

O número de formas em que podem ser chamadas sem repetição é 5.4.3.2.1

A probabilidade de serem registradas nacionalidades diferentes é:

$$P = \frac{5.4.3.2.1}{5.5.5.5.5} = \frac{24}{625}$$

Resposta. (a)

3. Uma urna contém três bolas pretas e cinco bolas brancas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas nessa urna de modo que, retirando-se uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser azul seja igual a 2/3?

Resolução:

Ora, sendo x o número de bolas azuis, o número total de bolas na urna será $3 + 5 + x = 8 + x$. Sabemos que a probabilidade da bola retirada ser azul é 2/3, então usando a definição de probabilidades, temos:

$$\frac{x}{x+8} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x = 2x + 16 \Leftrightarrow x = 16$$

5. Em uma loteria com 30 bilhetes, 4 são premiados. Comprando-se 3 bilhetes, qual a probabilidade de apenas um ser premiado.

Resolução

Em busca de $n(a)$ = número de casos favoráveis e $n(s)$ = número de casos possíveis.

Para termos um premiado, 2 devem ser não premiados, logo:

$$n(A) = C_{4,1} \cdot C_{26,2} = 1300$$

Ora, queremos escolher 3 bilhetes de um total de 30, logo:

$$n(S) = C_{30,3} = 4060$$

Deste modo, usando a definição de probabilidades: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, temos:

$$P(A) = \frac{1300}{4060} = \frac{65}{203}$$

6. Escolhe-se ao acaso três vértices distintos de um cubo. A probabilidade de que estes vértices pertençam a uma mesma face é:
a) $3/14$ b) $2/7$ c) $5/14$ d) $3/7$ e) $13/18$

Resolução:

Escolhendo-se um vértice ao acaso, restarão 7 vértices e destes somente três pertencem a mesma face que o escolhido. Logo a probabilidade é claramente, $P=3/7$

Outra resolução:

Ora, o número de maneiras de escolher 3 vértices dentre 8 é dado por $C_{8,3}$, pois trocando a ordem dos vértices no conjunto, não altera o mesmo. Portanto, $n(S) = C_{8,3} = 56$

O evento A é formado por todos os referidos conjuntos em que os três vértices pertencem a mesma face, nas seis faces. Portanto, $n(A) = C_{4,3} \cdot 6 = 24$.

$$\text{Com efeito, } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

Resposta. (d)

7. Escolhem-se aleatoriamente três dos seis vértices de um hexágono regular. Qual a probabilidade de que os vértices escolhidos formem um triângulo eqüilátero?

Resolução:

Existem $C_{6,3}$, ou seja, 20 maneiras de formar triângulos unindo 3 vértices do hexágono. Destes 20 triângulos, somente 2 são triângulos eqüiláteros (veja figura). Logo, a probabilidade procurada é:

$$P = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \text{ ou } 10\%$$

8. Tomando-se, ao acaso, uma das retas determinadas pelos vértices de um pentágono regular, a probabilidade de que a reta tomada ligue dois vértices consecutivos é:

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{5}$

Resolução:

Escolhendo-se aleatoriamente 1 vértice ao acaso, restarão 4, dos quais dois são consecutivos ao escolhido. Deste modo, a probabilidade é $P=1/2$.

9. Considere um cubo e suas arestas. A probabilidade de escolhermos um par de arestas distintas desse cubo e elas serem paralelas entre si é

- a) $\frac{2}{33}$ b) $\frac{5}{66}$ c) $\frac{1}{11}$ d) $\frac{4}{33}$ e) $\frac{3}{11}$

Resolução:

Escolhendo-se aleatoriamente uma aresta do referido cubo, restarão 11 arestas, das quais somente 3 são paralelas a aresta escolhida (veja figura). Daí, a probabilidade é claramente $\frac{3}{11}$.

10. Um colégio tem 400 alunos. Destes 100 estudam Matemática, 80 estudam Física, 100 estudam Química, 20 estudam Matemática, Física e Química, 30 estudam Matemática e Física, 30 estudam Física e Química, 50 estudam somente Química. A probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, estudar Matemática e Química é:

- a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{3}$ e) $\frac{3}{5}$

Resolução:

Veja o diagrama de Venn abaixo:

Portanto, a probabilidade procurada é: $\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$

11. Num país, 10% da população é portadora de um vírus. Um teste para detectar ou não a presença do vírus dá 90% de acertos quando aplicado a portadores e 80% de acertos quando aplicado a não portadores. Qual o percentual de pessoas realmente portadoras do vírus, dentre aquelas que o teste classificou como portadoras?

Resolução:

Suponhamos uma população de 100 pessoas. Veja o diagrama correspondente a questão

População de 100 $\left\{ \begin{array}{l} P = \text{portadores}(10\% \cdot 100 = 10) \\ NP = \text{não portadores}(90) \end{array} \right.$

Teste com Portadores $\left\{ \begin{array}{l} CV = \text{com vírus}(90\% \cdot 10 = 9) \\ SV = \text{sem vírus}(10 - 9 = 1) \end{array} \right.$

Teste com Não Portadores $\left\{ \begin{array}{l} SV = 80\% \cdot 90 = 72 \\ CV = 90 - 72 = 18 \end{array} \right.$

Portanto, a probabilidade procurada é:

$$P = \frac{9}{18 + 27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

12. Num certo país, 10% das declarações de imposto de renda são suspeitas e submetidas a uma análise detalhada; entre estas verificou-se que 20% são fraudulentas.

Entre as não suspeitas, 2% são fraudulentas.

a) Se uma declaração é escolhida ao acaso, qual a probabilidade dela ser suspeita e fraudulenta?

b) Se uma declaração é fraudulenta, qual a probabilidade dela ter sido suspeita?

Resolução:

Suponhamos uma amostra de 100 declarações.

Veja o diagrama correspondente abaixo:

$$100 \text{ declarações} \begin{cases} S = \text{suspeita}(10) \\ NS = \text{não suspeita}(90) \end{cases}$$

$$S \begin{cases} F = \text{fraudulentas} = 20\%(10) = 2 \\ NF = \text{não fraudulentas} = 10 - 2 = 8 \end{cases}$$

$$NS \begin{cases} F = 2\%(90) = 1,8 \\ NF = 90 - 1,8 = 98,2 \end{cases}$$

$$a) P(\text{suspeita e fraudulenta}) = \frac{2}{100} \text{ ou } 2\%$$

$$b) P(\text{suspeita/ fraudulenta}) = \frac{2}{2+1,8} = \frac{2}{3,8} \cong 0,52 \text{ ou } 52\%$$

13. Um prédio de três andares, com dois apartamentos por andar, tem apenas três apartamentos ocupados. A probabilidade de cada um dos três andares tenha exatamente um apartamento ocupado é :

- a) $2/5$ b) $3/5$ c) $1/2$ d) $1/3$ e) $2/3$

Resolução:

Escolhendo um apartamento ao acaso dos 6, restarão 5. Destes 5 queremos que exatamente dois estejam ocupados (1 por andar), pois um já foi ocupado(o escolhido). Deste modo, a probabilidade procurada é $2/5$.

Resposta. (a)

14. Uma moeda é lançada quatro vezes. A probabilidade de que o resultado cara ocorra pelo menos uma vez é :

- a) $1/4$ b) $3/16$ c) $15/16$ d) $9/16$ e) $3/4$

Resolução:

Ora, sabemos pela teoria que $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. A probabilidade de ocorrer cara pelo menos uma vez é igual a 1 (todos os casos) menos a probabilidade de não ocorrer cara nenhuma vez. Como a moeda é lançada 4 vezes, tendo cada lançamento a probabilidade $1/2$ de ocorrer

cara e $\frac{1}{2}$ de ocorrer coroa, aplicando a propriedade acima e a regra do produto para eventos independentes, temos:

$$P(\text{Cara pelo menos 1 vez}) = 1 - P(\text{n\~ao ocorrer cara nenhuma das 4 vezes}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{16}$$

Resposta. (c)

15. Consideremos um conjunto de 10 frutas, das quais 3 est\~ao estragadas.

Escolhendo-se aleatoriamente 2 frutas desse conjunto, determinar a probabilidade de:

a) ambas n\~ao estejam estragadas

b) pelo menos uma esteja estragada

Resolu\~ao:

a) O n\~umero de maneiras de escolher 2 frutas dentre 10 \u00e9 $C_{10,2}$

Ora, se 3 est\~ao estragadas, temos que 10-3 ou 7 n\~ao est\~ao estragadas.

O n\~umero de maneiras de escolher duas frutas n\~ao estragadas \u00e9 $C_{7,2}$.

Deste modo, a probabilidade de ambas n\~ao estejam estragadas \u00e9:

$$P(A) = \frac{C_{7,2}}{C_{10,2}} = \frac{7 \cdot 6}{10 \cdot 9} = \frac{7}{15}$$

b) Ora, $P(\text{pelo menos 1 estragada}) = 1 - P(\text{ambas n\~ao estragadas})$

$$= 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

16. Um rep\~ortier pretende entrevistar apenas 4 dos integrantes de um conjunto musical, composto por 7 rapazes e 5 garotas. A probabilidade de que o grupo selecionado para a entrevista tenha pelo menos um representante de cada sexo \u00e9

a) $\frac{76}{99}$ b) $\frac{26}{33}$ c) $\frac{85}{99}$ d) $\frac{29}{33}$ e) $\frac{91}{99}$

Resolu\~ao:

Vamos usar o seguinte m\u00e9todo: Tudo o que pode e o que n\~ao pode e retirar o que n\~ao pode, isto \u00e9, Quero = Tudo (1) - N\~ao quero

Ora, P (pelo menos um representante de cada sexo no conjunto) = $1 - P(\text{somente rapazes no conjunto}) - P(\text{somente garotas no conjunto})$.
Existem $C_{12,4}$ ou 499 maneiras de escolher os 4 representantes do conjunto. Existem $C_{7,4}$ ou 35 maneiras de escolher 4 rapazes dentre os 7 e $C_{5,4}$ ou 5 maneiras de escolher 4 garotas dentre as 5. Daí a probabilidade P procurada é:

$$P = 1 - \frac{C_{7,4}}{C_{12,4}} - \frac{C_{5,4}}{C_{12,4}} = 1 - \frac{35}{499} - \frac{5}{499} = \frac{91}{99}$$

Resposta. (e)

17. Três lâmpadas são escolhidas aleatoriamente dentre 15 lâmpadas, das quais 5 são defeituosas. Encontre a probabilidade p de que

- (a) nenhuma seja defeituosa,
- (b) exatamente uma seja defeituosa,
- (c) pelo menos uma seja defeituosa.

Resolução:

Há $C_{15,3} = 455$ maneiras de escolher 3 lâmpadas dentre 15.

(a) Como há $15 - 5 = 10$ lâmpadas não-defeituosas, há $C_{10,3} = 120$ maneiras de escolher 3 lâmpadas não-defeituosas. Assim, $p = 120/455 = 24/91$.

(b) Há 5 lâmpadas defeituosas $C_{10,2} = 45$ pares diferentes de lâmpadas não-defeituosas; portanto, há $5 \cdot 45 = 225$ maneiras de escolher 3 lâmpadas das quais uma seja defeituosa. Assim, $p = 225/455 = 45/91$.

(c) O evento em que pelo menos uma é defeituosa é o complemento do evento em que nenhuma é defeituosa, o qual tem, por (a), a probabilidade $24/91$. Portanto,

$$p = 1 - 24/91 = 67/91$$

18- Duas cartas são selecionadas aleatoriamente dentre 10 cartas numeradas de 1 a 10. Encontre a probabilidade p de que a soma seja ímpar se

(a) as duas cartas são retiradas juntas,

(b) as duas cartas são retiradas uma após a outra sem reposição,

(b) as duas cartas são retiradas uma após a outra com reposição.

(a) Há $C_{10,2} = 45$ maneiras de selecionar 2 cartas dentre 10. A soma é ímpar se um número é ímpar e outro é par. Há 5 números ímpares; portanto, há $5 \cdot 5 = 25$ maneiras de escolher um número par e outro ímpar. Assim, $p = 25/45 = 5/9$.

(b) Há $10 \cdot 9 = 90$ maneiras de retirar duas cartas uma após outra sem reposição. Há $10 \cdot 10 = 100$ maneiras de retirar duas cartas uma após outra com reposição. Há $5 \cdot 5 = 25$ maneiras de retirar um número par e um número ímpar, e $5 \cdot 5 = 25$ maneiras de retirar um número ímpar e um número par; portanto, $p = (25 + 25)/90 = 50/90 = 5/9$.

(c) Há $10 \cdot 10 = 100$ maneiras de retirar duas cartas uma após outra com reposição. Como em (ii), há $5 \cdot 5 = 25$ maneiras de retirar um número par e um número ímpar, e $5 \cdot 5 = 25$ maneiras de retirar um número ímpar e um número par; portanto, $p = (25 + 25)/100 = 50/100 = \frac{1}{2}$.

19. De um total de 100 alunos que se destinam aos cursos de Matemática, Física e Química, sabe-se que:

I - 30 destinam-se à Matemática e, destes, 20 são do sexo masculino;

II - Total de alunos do sexo masculino é 50, dos quais 10 destinam-se à Química;

III-Existem 10 moças que se destinam ao curso de Química;

Nestas condições, sorteando-se um aluno, ao acaso, do grupo total e sabendo-se que é do sexo feminino, a probabilidade de que ele se destine ao curso de Matemática vale:

- a) $1/5$ b) $1/4$ c) $1/3$ d) $1/2$ e) 1

Resolução:

	MASC.	FEM.	TOTAL
MATEMÁTICA	20	10	30
FÍSICA	20	30	50
QUÍMICA	10	10	20
TOTAL	50	50	100

Evento A : total de alunos do sexo feminino e do curso de Matemática
Espaço Amostral S: total de alunos do sexo feminino

Analisando a tabela, temos: $n(A) = 10$ e $n(s) = 50$

Ora, usando a definição de probabilidades $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, temos :

$$P(A) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

Resposta: (a)

20. Ao se tentar abrir uma porta com um chaveiro contendo cinco chaves parecidas, das quais apenas uma destranca a referida porta, muitas pessoas acreditam que é mínima a chance de encontrar a chave certa na primeira tentativa, e chegam mesmo a dizer que essa chave só vai aparecer na última tentativa. Para esclarecer essa questão, calcule, no caso de um chaveiro contendo 5 chaves:

- a) a probabilidade de se acertar na primeira tentativa
- b) a probabilidade de se encontrar a chave certa depois da primeira tentativa
- c) a probabilidade de se acertar somente na última tentativa

Resolução:

a) Na primeira tentativa, temos: $P(A) = \frac{1}{5}$

b) Após a primeira tentativa, temos: $P(B) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

c) Na última tentativa, temos: $P(C) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{5}$

21. Quatro atiradores atiram simultaneamente em um alvo. Qual a probabilidade aproximada do alvo ser atingido, sabendo-se que cada atirador acerta, em média, 25% de seus tiros?

Resolução :

Notemos que: $P(\text{alvo ser atingido}) + P(\text{não ser atingido}) = 1$.

Isto posto, a $P(\text{alvo ser atingido}) = 1 - P(\text{não ser atingido})$

Como a probabilidade de um atirador acertar o alvo é 25% ou $\frac{1}{4}$, a de errar é 75% ou $\frac{3}{4}$.

Ora, como os eventos são independentes, aplicando a regra do produto, temos:

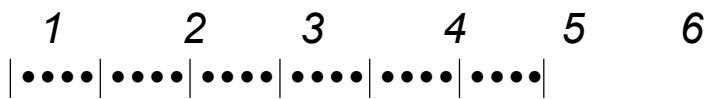
$$P(\text{alvo não ser atingido por nenhum dos quatro atiradores}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{81}{256}.$$

$$\text{Logo, } P(\text{alvo ser atingido}) = 1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256}.$$

22. Para a Copa do Mundo 24 países são divididos em seis grupos, com 4 países cada um. Supondo que a escolha do grupo de cada país é feita ao acaso, calcular a probabilidade de que dois países determinados A e B se encontrem no mesmo grupo.

Resolução:

Vamos tomar como espaço amostral o conjunto de todas as permutações de 24 elementos; ou seja o número de casos possíveis é 24!.
Consideremos o diagrama da figura abaixo



que representa os 24 times divididos em 6 grupos. Quantas permutações existem tais que A e B pertencem ao primeiro grupo? A pode ser colocado em quatro lugares; restam para B três lugares e os times restantes podem ser dispostos em 22! formas diferentes. Portanto o número de permutações com A e B no primeiro grupo é
 $4 \times 3 \times 22!$

Como para os outros grupos o raciocínio é idêntico, resulta que o número de permutações com A e B no mesmo grupo é
 $6 \times 4 \times 3 \times 22!$

A probabilidade procurada é portanto

$$\frac{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 22!}{24!} = \frac{3}{23} \approx 0,13$$

23. Alfredo quer enviar uma carta a Gláucia. A probabilidade de que Alfredo escreva a carta é de 8/10. A probabilidade de que o correio não a perca é 9/10. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de 9/10. Dado que Gláucia não recebeu a carta, qual a probabilidade de que Alfredo não a tenha escrito?
a) 24/36 b) 35/36 c) 25/44 d) 32/55 e) 27/64

Resolução:

A árvore correspondente é dada na figura abaixo:

Em anexo(pg.131)

$$P(\text{n\~ao escreve/ n\~ao recebe}) = \frac{P(\text{n\~ao escreve})}{P(\text{n\~ao recebe})} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{2}{10} + \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{8}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{2}{10} \cdot \frac{1000}{352} = \frac{25}{44}$$

Resposta: (c)

24. Num exame há 3 respostas para cada pergunta e apenas uma delas é certa. Portanto, para cada pergunta, um aluno tem probabilidade $\frac{1}{3}$ de escolher a resposta certa se ele está adivinhando e 1 se sabe a resposta. Um estudante sabe 30% das respostas do exame. Se ele deu a resposta correta para uma das perguntas, qual a probabilidade de que a adivinhou?

a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{7}{12}$ d) $\frac{7}{16}$ e) $\frac{7}{18}$

Resolução:

A árvore correspondente é dada na figura abaixo:

p. 134

Ora, se o referido estudante sabe 30% das respostas, é fácil concluir que o mesmo não sabe 70% das respostas do exame.

Logo, se ele deu a resposta correta para uma das perguntas, a probabilidade de que a adivinhou é:

$$P(\text{adivinhou} / \text{resposta correta}) = \frac{70\% \times \frac{1}{3}}{70\% \times \frac{1}{3} + 30\% \times 1} = \frac{0,7 \times \frac{1}{3}}{0,7 \times \frac{1}{3} + 0,3 \times 1} = \frac{7}{16}$$

Resposta: (d)

25. Em uma cidade 10% das pessoas possuem carro importado. Dez pessoas dessa cidade são selecionadas ao acaso e com reposição. A probabilidade de que exatamente 7 das pessoas selecionadas possuam carro importado é:

a) $120(0,1)^7(0,9)^3$ b) $(0,1)^3(0,9)^7$ c) $120(0,1)^7(0,9)$ d) $120(0,1)(0,9)^7$
e) $(0,1)^7(0,9)^3$

Resolução:

A probabilidade de que uma determinada pessoa desta cidade possua carro importado é 10% ou 0,1. Com efeito, a probabilidade de que esta pessoa não possua carro importado é 90% ou 0,9. Daí, como são selecionadas 10 pessoas, a probabilidade de que as 7 primeiras pessoas possuam carro importado e as três últimas não possuam é:

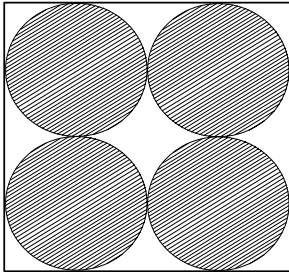
$$(0,1)^7 \cdot (0,9)^3$$

Como o problema não exige necessariamente que sejam as sete primeiras pessoas que possuam carro importado, bastando que sejam exatamente 7 dentre as 10 selecionadas, temos $\binom{10}{7}$ possibilidades, ou seja, 120.

Portanto, a probabilidade solicitada é $120 \cdot (0,1)^7(0,9)^3 = 0,000032\%$

Resposta: (a)

1. A figura abaixo representa uma parede quadrada na qual estão pintados discos de raio r . Se uma bola é lançada totalmente ao acaso contra a parede, a probabilidade de ela tocar fora dos discos está entre
- a) 14% e 16% b) 17% e 19% c) 20% e 22% d) 23% e 25% e) 26% e 28%



2. As máquinas A e B produzem o mesmo tipo de parafuso. A porcentagem de parafusos defeituosos produzidos, respectivamente, pelas máquinas A e B é de 15% e de 5%. Foram misturados, numa caixa, 100 parafusos produzidos por A e 100 parafusos produzidos por B. Se tirarmos um parafuso ao acaso e ele for defeituoso, a probabilidade de que tenha sido produzido pela máquina A é de
- a) 10% b) 15% c) 30% d) 50% e) 75%
3. Em uma gaveta, cinco pares diferentes de meias estão misturados. Retirando-se ao acaso duas meias, a probabilidade de que elas sejam do mesmo par é de
- a) $1/10$ b) $1/9$ c) $1/5$ d) $2/5$ e) $1/2$
4. Uma parteira prevê, com 50% de chance de acerto, o sexo de cada criança que vai nascer. Num conjunto de três crianças, a probabilidade de ela acertar pelo menos duas previsões é de
- a) 12,5% b) 25% c) 37,5% d) 50% e) 66,6%
5. Dentre um grupo formado por dois homens e quatro mulheres, três pessoas são escolhidas ao acaso. A probabilidade de que sejam escolhidos um homem e duas mulheres é de
- a) 25% b) 30% c) 33% d) 50% e) 60%

6. No jogo da Mega Sena são sorteados seis números distintos dentre os que aparecem na figura.

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Considere P a probabilidade de que nenhum número sorteado em um concurso seja sorteado no concurso seguinte. Dentre as alternativas abaixo, a melhor aproximação para P é

- a) 90% b) 80% c) 70% d) 60% e) 50%

1. RESOLUÇÃO. Seja A o evento “acertar a bola na área da parede não comum a área dos quatro discos nela representados”. A área A_1 relativa ao evento A é expressa pela área A_2 do quadrado menos a área A_3 dos quatro círculos. Portanto, $A_1 = A_2 - A_3$ ou $A_1 = (2r + 2r)^2 - 4 \cdot \pi r^2$ ou $A_1 = 16r^2 - 4\pi r^2$ ou $A_1 = 4r^2 (4 - \pi)$. Lembrando que a probabilidade de ocorrer um evento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis à sua ocorrência e o número de casos possíveis, temos que a probabilidade de ocorrer o evento A corresponde ao quociente entre a área A_1 de ocorrência do evento A e a área total (possível) A_2 . Com isso, escreve-se $P(A) = \frac{4r^2(4-\pi)}{16r^2}$ ou $P(A) = \frac{4-\pi}{4}$. Considerando $\pi = 3,14$, obtém-se $P(A) = \frac{4-3,14}{4}$ ou $P(A) = 0,215$ ou $P(A) = 21,5\%$. Logo, a probabilidade procurada está entre 20% e 22%. RESPOSTA. (c)

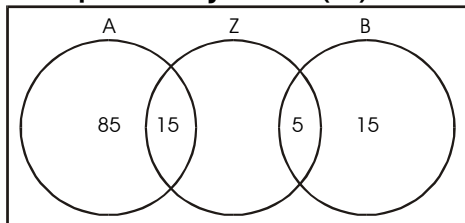
2. RESOLUÇÃO. Trata-se da aplicação da probabilidade condicional. Sejam os eventos:

$X = \{x|x \text{ é parafuso produzido pela máquina A com ou sem defeito}\}$ e $n(X) = 100$ dos quais 15%

são defeituosos, ou seja, 15.

$Y = \{y|y \text{ é parafuso produzido pela máquina B com ou sem defeito}\}$ e $n(Y) = 100$ dos quais 5% são defeituosos, ou seja 5 .

$Z = \{\text{parafuso defeituoso produzido pela máquina A ou pela máquina B}\}$ e $n(Z) = 15 + 5$ ou $n(Z) = 20$.



O diagrama acima mostra claramente que $n(A \cap Z) = 15$. Assim, aplicando o cálculo da probabilidade condicional $P(A / Z) = \frac{n(A \cap Z)}{n(Z)}$,

temos $P(A/Z) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ ou $P(A/Z) = 75\%$. Logo, 75% é a probabilidade que o parafuso tenha sido produzido pela máquina A.

RESPOSTA. (e)

3. RESOLUÇÃO. Cinco pares de meias estão misturados na gaveta, havendo portanto, 10 meias. O espaço amostral é $S = \{x|x \text{ é dupla de meias}\}$ e $n(S) = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}$ ou $n(S) = 45$. Seja o evento $A = \{x|x \text{ é dupla de meias do mesmo par}\}$ e $n(A) = 5$ pois o enunciado afirma que são cinco diferentes pares de meias . Lembrando que $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$,

temos $P(A) = \frac{5}{45}$ ou $P(A) = \frac{1}{9}$. Logo, $\frac{1}{9}$ é a probabilidade das meias serem do mesmo par.

RESPOSTA. (b)

OUTRA RESOLUÇÃO PARA A QUESTÃO 3

RESOLUÇÃO. Seja P a probabilidade procurada. Quando retirarmos uma meia, do total das 10 disponíveis (5 pares), só existirá uma meia, entre as 9 restantes, que formará par com a meia retirada. Portanto a probabilidade de ser retirada a meia que forma o referido par é $P = \frac{1}{9}$.

RESPOSTA. (b)

4. RESOLUÇÃO. Seja P a probabilidade procurada e sejam os eventos $A = \{\text{acertar o sexo da criança por ocasião de seu nascimento}\}$ e $\bar{A} = \{\text{errar o sexo da criança por ocasião de seu nascimento}\}$. Sendo dado $P(A) = 1/2$ e aplicando a propriedade $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, temos $1/2 + P(\bar{A}) = 1$ ou $P(\bar{A}) = 1/2$. Tratam-se de eventos independentes e, para um conjunto de três crianças, o que pode ocorrer para a parteira acertar, pelo menos, duas previsões é $AA\bar{A}$ ou $A\bar{A}A$ ou $\bar{A}AA$ ou AAA . Assim, aplicando a regra do produto, vem

$$P = P(A) \cdot P(A) \cdot P(\bar{A}) + P(A) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(A) + P(\bar{A}) \cdot P(A) \cdot P(A) + P(A) \cdot P(A) \cdot P(A)$$

$$P = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \quad \text{ou}$$

$$P = 4 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \quad \text{ou} \quad P = 1/2 \quad \text{ou} \quad P = 50\%.$$

RESPOSTA. (d)

5. RESOLUÇÃO. Trata-se da aplicação da definição de probabilidade $P(A) = n(A)/n(S)$, onde $n(A)$ é o número de casos favoráveis e $n(S)$ é o número de casos possíveis. O espaço amostral é $S = \{x \mid x \text{ é grupo de três pessoas}\}$, sendo disponíveis dois homens e quatro mulheres, totalizando seis pessoas. A ordem que as pessoas figuram no grupo, não altera o mesmo, tratando-se portanto, de um caso de combinações simples, onde somente o critério NATUREZA interessa. Assim, $n(S) = C_6^3$ ou $n(S) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ou $n(S) = 20$. O evento é $A = \{y \mid y \text{ é grupo de três pessoas formado por 1 homem e 2 mulheres}\}$ e $n(A) = C_2^1 \cdot C_4^2$ ou $n(A) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 1 \cdot 2}$ ou $n(A) = 12$. Isso posto, $P(A) = \frac{12}{20}$ ou $P(A) = 60\%$.

Logo, a probabilidade procurada é 60%.

RESPOSTA. (e)

6. RESOLUÇÃO. O número de elementos do espaço amostral (número de casos possíveis) para o sorteio do 1º. número é 60 e o número de elementos do evento (número de casos favoráveis) é $60 - 6 = 54$, pois não são considerados os seis números sorteados no concurso anterior. O espaço amostral para o sorteio do 2º. número é 59, pois já foi visto que número sorteado fica eliminado do mesmo concurso, conseqüentemente, o número de elementos do evento fica reduzido de uma unidade, passando para 53. Isso posto, procede-se de forma idêntica até o sexto número a ser sorteado, permitindo escrever que $P = 54/60 \cdot 53/59 \cdot 52/58 \cdot 51/57 \cdot 50/56 \cdot 49/55$. Veja que a divisão $54/60$ resulta 0,9 e as divisões $53/59$, $52/58$, $51/57$, $50/56$, $49/55$ resultam em 0,89 ou, aproximadamente 0,9 o que permite escrever $P = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9$ ou

$$P = (0,9)^6 \text{ ou } P = \left(\frac{9}{10}\right)^6 \text{ ou } P =$$

$\frac{9^3 \cdot 9^3}{1000000}$ ou $P = \frac{729 \cdot 729}{1000000}$ ou $P = \frac{531441}{1000000}$ ou $P = \frac{53,14441}{100}$ ou $P = 53,14\%$. Logo, a melhor aproximação para P é 50%.

OBSERVAÇÃO. Se os cálculos fossem efetuados com auxílio da calculadora eletrônica, seria obtido $P = 51,5\%$. A problemática é que, na UFRGS, não é permitido a utilização de tal recurso.

RESPOSTA. (e)

7. Para cada uma das 30 questões de uma prova objetiva são apresentadas 5 alternativas de respostas, das quais somente uma é correta.

Considere as afirmações relativas à prova:

I – existem no máximo 150 maneiras diferentes de responder à prova.

II- Respondendo aleatoriamente, a probabilidade de errar todas as questões é $(0,8)^{30}$

III- Respondendo aleatoriamente, a probabilidade de exatamente 8 questões estarem corretas é $\binom{30}{8}(0,2)^8(0,8)^{22}$.

Analisando as afirmações, concluímos que:

a) apenas III é verdadeira

- b) apenas I e II são verdadeiras
- c) apenas I e III são verdadeiras
- d) apenas II e III são verdadeiras
- e) I, II e III são verdadeiras

Resolução:

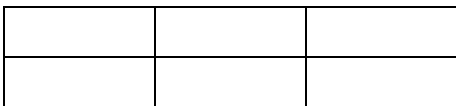
I) Como cada questão tem 5 alternativas e temos 30 questões, o número de maneiras de responder as 30 questões é 5^{30} . Como 5^{30} é muito maior que 150, a alternativa é falsa.

II) A probabilidade de errar uma dada questão é $4/5$ ou $0,8$. Logo, como as questões são independentes, temos que a probabilidade de errar todas as questões é $0,8^{30}$.

III) A probabilidade de acertar uma dada questão é $1/5$ ou $0,2$. Ora, o número de maneiras de escolher oito questões dentre 30 é $C_{30,8}$ ou $\binom{30}{8}$.

Daí o número de maneira de acertar exatamente 8 questões dentre 30 é $\binom{30}{8} \cdot (0,2)^8 (0,8)^{22}$

8. Cada cartela de uma coleção é formada por seis quadrados coloridos, justapostos como indica a figura abaixo.



Em cada cartela, dois quadrados foram coloridos de azul, dois de verde e dois de rosa. A coleção apresenta todas as possibilidades de distribuição dessas cores nas cartelas nas condições citadas e não existem cartelas com a mesma distribuição de cores. Retirando-se ao acaso uma cartela da coleção, a probabilidade de que somente uma coluna apresente os quadrados de mesma cor é de

- a) 6%
- b) 36%
- c) 40%
- d) 48%
- e) 90%

Resolução:

Em busca do número de casos favoráveis

Como em cada cartela, dois quadrados foram coloridos de azul, dois de verde e dois de rosa, o número de maneiras de pintar os quadrados é

$$\frac{6!}{2!2!2!} = 90.$$

Em busca do número de casos favoráveis

Chamando verde de V, azul de A e rosa de R . Pintando a primeira coluna de VV, o número de maneiras de preencher as outras colunas tendo cada uma cores diferentes é:

V	A	R
V	R	A

V	A	A
V	R	R

V	R	R
V	A	A

V	R	A
V	A	R

Com o VV pode estar na 1, 2, ou 3 coluna , temos $4 \cdot 3 = 12$. Além disso, como são três cores, temos: $12 \cdot 3 = 36$

Com efeito, a probabilidade de de que somente uma coluna apresente os

quadrados de mesma cor é

$$P = \frac{36}{90} = \frac{4}{10} \text{ ou } 40\%$$

9. Sendo A um ponto fixo de uma circunferência de raio r e escolhendo-se ao acaso um ponto B sobre o círculo, a probabilidade da corda AB ter comprimento maior que r está entre

- a) 25% e 30%
- b) 35% e 40%
- c) 45% e 50%
- d) 55% e 60%
- e) 65% e 70%