II)TEOREMA DO LIMITE CENTRAL E DESIGUALDADE DE TCHEBYCHEFF
Lei Forte dos Grandes Números

1) TLC

Indiquemos por x_1, ...x_n v.a. independentes, todas elas com a mesma f.d.p. com média = m e Var= s^2 .

$$Seja \quad \overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} \Rightarrow \overline{X}_{n\to\infty} \sim N(m, \frac{s^2}{n})$$

Então, a variável aleátoria padronizada Z é $Z = \dfrac{\overline{X} - m}{s / \sqrt{n}}$

2) DESIGUALDADE DE TCHEBYCHEFF

$$P(|X - C| \geq e) \leq \frac{1}{e^2}.E(X - C)^2 \quad \text{ou} \quad P(|X - m| \geq e) \leq \frac{Var}{e^2}$$

$$Se \ e = \mathrm{K} s, \ \text{temos :}$$

$$\mathrm{P}[|\mathrm{x} - m| \geq Ks] \leq K^{-2} \quad \text{ou} \quad \mathrm{P}[|\mathrm{x} - m| \leq Ks] \leq 1 - K^{-2}$$

3) Lei Forte dos Grandes Números

$$Se \ \mathrm{P}(|\mathrm{X_n} - X > e)| \to 0 \ \text{quando} \ \mathrm{n} \to \infty, \forall e > 0 \Rightarrow \lim_{\mathrm{n}\to\infty} P\{|\overline{q} - q| \leq e\} = 1 \quad \text{ou}$$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} P\{|\overline{q} - q| \geq e\} = 0$$

Obs: As condições suficientes para identificar a consistência de um estimador são baseadas na Lei dos Grandes Números.

Questões ANPEC:

QUESTÃO 11/1998

Com relação a desigualdade de Tchebycheff e ao Teorema Central do Limite, pode-se afirmar que :

(0) Se uma variável aleatória X tem média μ , E(X)=μ , e variância igual a zero, Var(X) = 0, então $P\{|X - m| \leq e\} = 1$ para todo $e > 0$, ou seja, toda a probabilidade estará concentrada na média E(X) = μ . V

(1) Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2. Quando se considera o evento complementar, uma das formas da desigualdade de Tchebycheff é igual a $P\{|X - m| > ks\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}$, onde k é um número real. F

(2) Se a população tem distribuição Normal, então a distribuição das médias amostrais também será Normal, independente do tamanho da amostra. V

(3) Se *X* tem distribuição desconhecida com média 500 e variância 2.500, para uma amostra aleatória de tamanho 100 podemos afirmar que a média da amostra tem distribuição aproximadamente normal com média 500 e variância 25. V

<u>QUESTÃO 13/2000</u>

Dados os seguintes enunciados envolvendo variáveis aleatórias, é correto afirmar que:

V (0) Se X é uma variável aleatória com média μ finita e variância σ^2 = 1, então

$$Pr (|X - \mu | \leq 2) \geq 0.75.$$

<u>QUESTÃO 15/2001</u>

Seja uma variável aleatória X com média E(X) = 0 e variância σ_x^2 = 25. Qual o limite de probabilidade para que [X – E(X)] > 10? Resposta em percentagem. Resposta=25

QUESTÃO 06/2002

Indique se as seguintes considerações sobre a Lei dos Grandes Números, Desigualdade de Tchebycheff e teorema do Limite Central são verdadeiras (V) ou falsas (F).

V De acordo com a desigualdade de Tchebycheff, se a variância de uma variável aleatória X for muito próxima de zero, a maior parte da distribuição de X estará concentrada próxima de sua média.

F O teorema do Limite Central afirma que,para uma amostra grande o suficiente, a distribuição de uma amostra aleatória de uma população Qui-quadrado se aproxima da Normal.

V As condições suficientes para identificar a consistência de um estimador são baseadas na Lei dos Grandes Números.

F Em n repetições independentes de um experimento, se f_A é a freqüência relativa da ocorrência de A, então $P\{|f_A - P| < \varepsilon\} \leq 1 - \frac{P(1-P)}{n\varepsilon^2}$, em que P é a probabilidade constante do evento A e ε é qualquer número positivo.

V Se uma variável aleatória X tem distribuição Binomial com parâmetros n = 20 e P = 0,5, então $P\{X \leq a\} \approx \Phi(\frac{a-10}{\sqrt{5}})$ em que $\Phi(\bullet)$ é a função de distribuição Normal padrão.

QUESTÃO 15/2002

Quantas vezes ter-se-á de jogar uma moeda equilibrada de forma a se ter pelo menos 95% de certeza de que a freqüência relativa do resultado "cara" fique a menos de 0,01 da probabilidade teórica ½, ou seja, de maneira que a amplitude do intervalo de confiança da probabilidade teórica seja 0,02? (Utilize o teorema de Tchebycheff. Divida a resposta por 1.000 e transcreva a parte inteira do número encontrado). Resposta=50